

文章编号: 1000-7598-(2008)03-0679-06

含饱和土的层状场地的动力响应

尤红兵¹, 梁建文², 赵凤新¹

(1. 中国地震灾害防御中心, 北京 100029; 2. 天津大学 土木工程系, 天津 300072)

摘 要: 利用精确的土层和半空间动力刚度矩阵求解了含饱和土的层状场地的动力响应, 给出了含饱和土层状场地的自由场 (入射 P 波、SV 波)、动力 Green 函数及刚性条形基础动力刚度的计算方法, 由此建立的场地模型更接近实际情况。建议方法的退化结果与单相场地结果一致。研究了界面不同透水条件对基础动力刚度的影响, 并与相应单相场地结果进行了对比。研究表明: 界面透水条件对竖向弹簧系数影响最大, 饱和土体中孔隙水对场地动力响应应具有不可忽视的影响。

关 键 词: 饱和土; 层状半空间; 动力响应; 动力刚度

中图分类号: TU 443

文献标识码: A

Dynamic responses of a multilayered site with saturated soils

YOU Hong-bing¹, LIANG Jian-wen², ZHAO Feng-xin¹

(1. China Earthquake Disaster Prevention Center, Beijing 100029, China; 2. Department of Civil Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: Dynamic responses of a multilayered site with saturated soils are computed by using the exact dynamic-stiffness matrix of layer and halfspace. The calculations of free field response (incident P and SV waves), Green's functions and dynamic stiffness of strip rigid foundation are presented. The site model is more close to the real site. The degenerated results of this study are coincided with that of dry site. The influences of permeability of saturated soil on the dynamic stiffness of foundation are studied; and the results are compared to that of the corresponding dry site. The numerical studies indicate that the permeability conditions have an significant influence on vertical spring coefficients. It is shown that the porous fluid plays an important role in dynamic response of multilayered site with saturated soils.

Key words: saturated soils; layered halfspace; dynamic response; dynamic stiffness

1 引 言

地震震害调查以及强震观测记录均表明, 地表覆盖土层对地震地面运动的幅值、频谱以及持时等具有重要影响, 因而地表覆盖土层对地震影响的估计始终是地震工程的一个重要研究课题。Wolf^[1]建立了水平土层和半空间的精确动力刚度矩阵, 形成了利用直接刚度法求解层状覆盖土中波的传播以及土-结构相互作用等问题较完整的理论, 并在实际工程中得到广泛应用。此后, Rajapakse^[2]、Zeng X^[3]、Senjuntichai^[4]、梁建文^[5, 6]、尤红兵^[7, 8]等又将此理论推广到了层状饱和场地, 可用于自由场反应分析、动力 Green 函数的计算及基础动力刚度的求解, 为层状饱和场地的动力响应分析奠定了基础。Philippacopoulos 等^[9]通过引入势函数的方法研究了

上层为单相弹性层, 下层为两相多孔饱和半空间上刚性圆板的竖向振动问题。陈胜立^[10]研究了下卧基岩时单层饱和地基在竖向简谐荷载作用下的动力响应问题。王国才^[11]等讨论了上覆单相弹性层的饱和地基上刚性圆板的扭转振动问题, 并把饱和地基当作半空间进行考虑。徐长节等^[12]研究了上覆单相弹性层的饱和地基上刚性条形基础竖向振动问题; 吴大志等^[13]研究了下卧基岩双层地基上刚性圆板的扭转振动, 场地模型更接近实际情况。

本文将地下水位以上土层视为单相介质 (干土), 地下水位以下土层为饱和介质, 较硬的岩石为弹性半空间 (单相介质)。利用精确的土层和半空间动力刚度矩阵求解了含饱和土的层状场地的动力响应, 给出了含饱和土的层状场地自由场 (入射 P 波、SV 波)、动力 Green 函数及刚性条形基础动

收稿日期: 2006-06-14

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No. 50378063); 天津市应用基础研究重点项目 (No. 07JCZDJC10100) 联合资助。

作者简介: 尤红兵, 男, 1970 年生, 博士, 副研究员, 主要从事地震波动方面的研究。E-mail: hbyou@126.com

力刚度（阻抗）的计算方法，由此建立的场地模型进一步接近实际情况。本文方法的退化结果与单相场地结果一致。研究了界面不同透水条件对基础动力刚度的影响，并与相应单相场地结果进行了对比。结果表明：界面透水条件对竖向弹簧系数影响最大，饱和土体中孔隙水对场地动力响应具有不可忽视的影响。

2 自由场计算

图 1 表示一个 N 层含饱和土的层状场地，置于半空间上。图中被填充部分为饱和土，其他土层和半空间均为弹性干土。自由场的计算可利用精确的土层动力刚度矩阵求得。

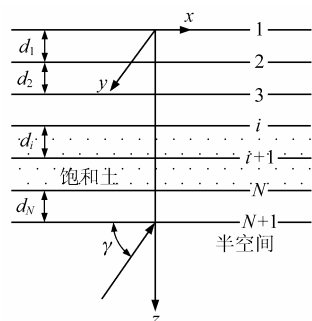


图 1 层状场地示意图

Fig.1 Model of layered system

2.1 干土土层的动力刚度矩阵

Wolf 对于土层状场地自由场的反应进行了详细分析和讨论，并给出了平面内运动土层和半空间的精确动力刚度矩阵^[1]。当场地中含饱和土层时，为考虑干土和饱和土交界面处的应力、位移的连续条件，需将 Wolf 给出的动力刚度矩阵改为如下形式：

$$\begin{bmatrix} iP_1 \\ R_1 \\ iP_2 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} & k_{13} & -k_{14} \\ -k_{21} & k_{22} & -k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & -k_{32} & k_{33} & -k_{34} \\ -k_{41} & k_{42} & -k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} iu_1 \\ w_1 \\ iu_2 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} iP_o \\ R_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & -r_{12} \\ -r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} iu_o \\ w_o \end{bmatrix} \lim_{x \rightarrow \infty} \quad (2)$$

式中： u_1 ， w_1 ， P_1 ， R_1 分别为土层顶面的位移和应力幅值； u_2 ， w_2 ， P_2 ， R_2 分别为土层底面的位移和应力幅值； u_o ， w_o ， P_o ， R_o 分别为半空间表面的位移和应力幅值； i 为虚数单位； k_{11} ， k_{12} ，…… k_{44} ，及 r_{11} ， r_{12} ， r_{21} ， r_{22} 详见文献[1]中式 (5.134)、式 (5.135)。

2.2 饱和土层的动力刚度矩阵

在文献[7]中，利用 Biot 基本波动方程^[14]，推导

了饱和土层和半空间的精确（即严格满足波动方程及边界条件）对称动力刚度矩阵，以及当波垂直入射时的层刚度矩阵，为进行饱和土层的动力反应分析奠定了基础。土层动力刚度矩阵为

$$\begin{bmatrix} iR_{x1} \\ R_{z1} \\ P_{z1} \\ iR_{x2} \\ R_{z2} \\ P_{z2} \end{bmatrix} = [S_{P1-P2-SV}] \begin{bmatrix} iU_{x1} \\ U_{z1} \\ w_{z1} \\ iU_{x2} \\ U_{z2} \\ w_{z2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

当波垂直入射时，上述土层的动力刚度矩阵 $[S_{P1-P2-SV}]$ 可进一步简化，记为 $[S_{P1-P2-SV}^{90}]$ ：

$$[S_{P1-P2-SV}^{90}] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_{23} & k_{33} & 0 & k_{26} & k_{36} \\ k_{14} & 0 & 0 & k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{25} & k_{26} & 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & k_{26} & k_{36} & 0 & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中： $[S_{P1-P2-SV}]$ ， $[S_{P1-P2-SV}^{90}]$ 中各元素详见文献[7]。 U_{x1} ， U_{z1} ， w_{z1} ， U_{x2} ， U_{z2} ， w_{z2} 分别为土层顶面、底面的位移； R_{x1} ， R_{z1} ， R_{x2} ， R_{z2} 分别为土层顶面、底面的应力； P_{z1} ， P_{z2} 分别为土层顶面、底面孔压幅值。

2.3 场地的动力刚度矩阵

当饱和土层与干土和半空间交界面透水时，交界面上应力、位移的连续条件分别为

$$R_2 + R_{z1} = 0; P_2 + R_{x1} = 0; P_{z1} = 0 \quad (5)$$

$$u_2 = U_{x1}; w_2 = U_{z1} \quad (6)$$

$$R_1 + R_{z2} = 0; P_1 + R_{x2} = 0; P_{z2} = 0 \quad (7)$$

$$u_1 = U_{x2}; w_1 = U_{z2} \quad (8)$$

当饱和土层与干土和半空间交界面不透水时，交界面上应力、位移的连续条件分别为

$$R_2 + R_{z1} + P_{z1} = 0; P_2 + R_{x1} = 0 \quad (9)$$

$$u_2 = U_{x1}; w_2 = U_{z1}; w_{z1} = 0 \quad (10)$$

$$R_1 + R_{z2} + P_{z2} = 0; P_1 + R_{x2} = 0 \quad (11)$$

$$u_1 = U_{x2}; w_1 = U_{z2}; w_{z2} = 0 \quad (12)$$

根据场地表面的边界条件及各土层交界面上

位移、应力和孔压的连续条件, 由集整土层和半空间的刚度矩阵可得整体动力刚度矩阵 $[S]$, 则场地运动的动力平衡方程为

$$[S][U]=[Q] \quad (13)$$

式中: $[U]$ 为位移列向量; 由 $iu_1, w_1, iu_2, w_2 \dots iu_{N+1}, U_{zj}, w_{zj} \dots iu_{N+1}, w_{N+1}$ 等组成; $[Q]$ 为外荷载列向量。若控制点选在基岩露头, 则 $[Q]$ 中最后2个元素由式(2)确定, 其他元素为0。

3 动力 Green 函数的计算

对于如图2所示的荷载均匀分布的水平线单元, 可利用直接刚度法计算格林影响函数。 p_0 为水平荷载幅值; r_0 为竖向荷载幅值; d 为每层土的厚度, Δb 为荷载半宽; k 为波数。将 p_0, r_0 在水平向展成关于 $\exp(-ikx)$ 的傅立叶积分, 得 k 域上的荷载幅值:

$$p(k) = \frac{p_0}{2\pi} \int_{-\Delta b}^{+\Delta b} \exp(ikx) dx = \frac{p_0}{\pi k} \sin k\Delta b \quad (14)$$

$$r(k) = \frac{r_0}{2\pi} \int_{-\Delta b}^{+\Delta b} \exp(ikx) dx = \frac{r_0}{\pi k} \sin k\Delta b \quad (15)$$

则外荷载列向量 $[Q]$ 为

$$Q_{j1} = ip(k) \quad (16)$$

$$Q_{j2} = r(k) \quad (17)$$

式中: $j1, j2$ 分别为荷载作用位置。

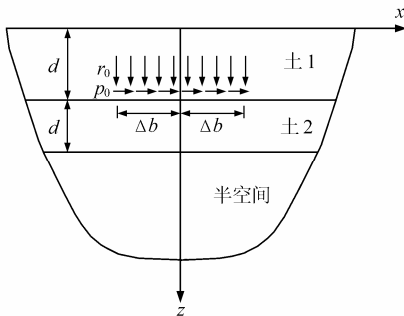


图2 作用均布荷载的层状场地
Fig.2 Layered site with constant load distribution

根据场地表面的边界条件及各土层交界面上位移、应力和孔压的连续条件, 由集整土层和半空间的刚度矩阵可得整体动力刚度矩阵。 k 域上的位移 $[U]$ 可由式(13)按直接刚度法计算。再进行傅立叶逆变换, 可得空间域位移幅值为

$$U(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(k) \exp(-ikx) dk \quad (14)$$

4 条形刚性基础的动力刚度

图3为条形基础及场地示意图, 基础在 y 方向无限长, 宽度为 $2B$ 。假定条形基础为刚性基础, 不计其质量。

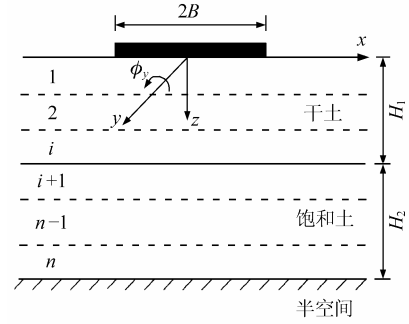


图3 条形基础及场地示意图
Fig.3 The strip rigid foundation on layered site

将结构-土交界面离散成单元, 再将相应的基底应力作为荷载作用在土单元上。所有节点上的荷载集度记为 $\{p\}$, 则结构-土交界面上的荷载幅值可以表达为

$$\{p(s)\} = [L(s)]\{p\} \quad (19)$$

式中: s 为结构-土交界面上的节点; $[L(s)]$ 为所选的插值函数。由荷载引起的表面位移幅值为

$$\{u_p(s)\} = [g(s)]\{p\} \quad (20)$$

式中: $[g(s)]$ 为层状半空间的动力Green函数。记结构-土交界面离散单元节点上给定的位移幅值为 $\{u_b\}$, 交界面上任一点的位移幅值为 $\{u(s)\}$, 则

$$\{u(s)\} = [N(s)]\{u_b\} \quad (21)$$

式中: $N(s)$ 为相应的形状函数, 它必须满足有限元法中的连续和完备条件。

由于只引入有限数目的荷载集度节点, 结构-土交界面 s 上的位移边界条件不可能得到严格满足 (即在 s 上的每一点都满足), 而只能是平均意义上成立, 即

$$\int_s [W(s)]^T (\{u_p(s)\} - \{u(s)\}) ds = \{0\} \quad (22)$$

利用这个条件, 可以确定荷载集度 $\{p\}$ 。矩阵 $[W(s)]$ 为权函数。将式(20)、式(21)代入式(22),

得到下式:

$$[G]\{p\} = [T]\{u_b\} \quad (23)$$

其中:

$$[G] = \int_s [L(s)]^T [g(s)] ds \quad (24)$$

$$[T] = \int_s [L(s)]^T [N(s)] ds \quad (25)$$

根据有限元法中的虚功原理,可以得到集中荷载的幅值 $\{P_b\}$ 为

$$\{P_b\} = [T]^T [G]^{-1} [T]\{u_b\} \quad (26)$$

根据此式,可将土的对称动力刚度矩阵定义为

$$[K] = [T]^T [G]^{-1} [T] \quad (27)$$

上式可分解为

$$[K] = K_0 ([k]) + i\delta [c] \quad (28)$$

式中: $[K]$ 和 $[c]$ 分别为无量纲弹簧系数和阻尼系数; K_0 为刚度系数,取 $K_0 = \pi\mu$, 可使平动自由度无量纲化,取 $K_0 = \pi\mu B^2$, 可使转动自由度无量纲化; μ 为地表介质的剪切模量; B 为基础半宽; δ 为无量纲频率, $\delta = \omega B/c_s$ 。 ω 为入射波的圆频率; c_s 为地表介质的剪切波速。

5 结果验证

5.1 入射 P 波、SV 波

如果不含孔隙流体时 (即流体密度 $\rho_f = 0$), 本文结果可退化为干土结果。利用文献[1]中刚度增长场地的算例来验证干土地地的计算。刚度增长场地是指半空间上总厚度为 D , 而剪切波速随深度线性增大的土层。图 4(a)、图 4(b)分别为入射 P 波时刚度增长场地土层顶面的水平、竖向运动。图 5(a)、图 5(b)分别为入射 SV 波时刚度增长场地基岩露头运动水平放大效应。定义无量纲频率为: $\delta = \omega D/c_s^L$; c_s^L 为刚度增长场地的平均剪切波速; $|u_t|$, $|w_t|$ 分别为场地地表水平、竖向位移幅值; $|A_p|$ 为入射波幅值; $|u_0|$ 为基岩露头水平位移幅值。从图中可知, 本文所得结果与文献[1]结果一致。

5.2 动力刚度

取文献[1]中半空间上单一土层算例来验证本程序的正确性。土层总厚度取 $H = B$, 半空间和土层的剪切波速比 $c_s^R/c_s^L = 2$, 质量密度比 $\rho^R/\rho^L = 1$, 泊松比均为 $\nu = 0.33$, 阻尼比均为 0.05。图 6(a)、图 6(b)为本文结果与 Wolf 相应结果比较。图中 k_x , k_z 分别为水平、竖向弹簧系数; $k_{\phi y}$ 为摇摆弹簧系数; $k_{x\phi y}$ 为水平向和摇摆耦合弹簧系数;

相应的阻尼系数为 c_x , c_z , $c_{\phi y}$, $c_{x\phi y}$ 。无量纲频率: $\delta = \omega B/c_s$ 。从图可知, 本文结果与文献[1]结果一致。

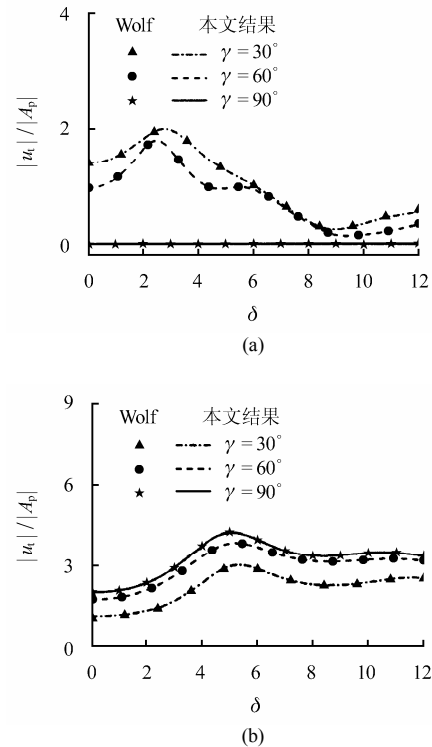


图 4 入射 P 波时土层顶面的运动

Fig.4 Motion at top of layer, incident P-wave

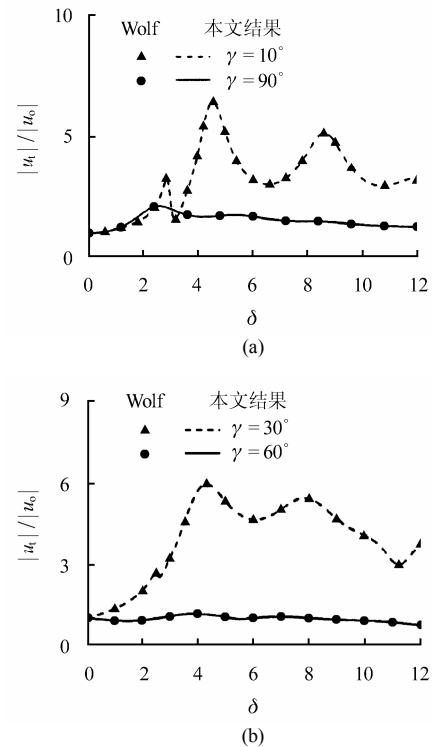


图 5 入射 SV 波时基岩露头水平放大效应

Fig.5 Horizontal amplification outcropping, Incident SV-wave

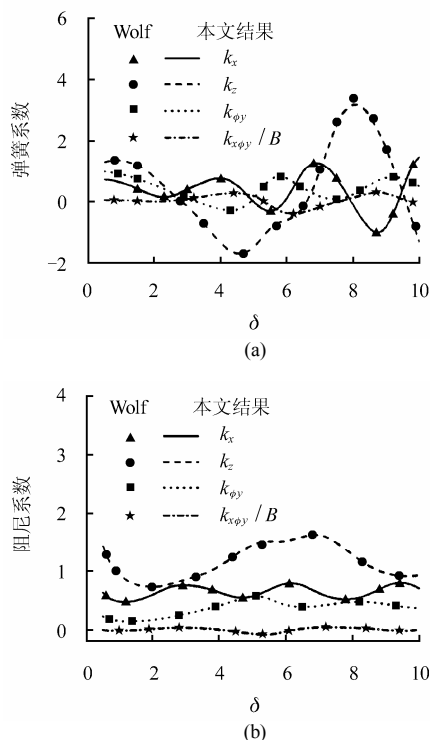


图6 条形基础的动力刚度

Fig.6 Dynamic stiffness of strip rigid foundation

6 算例分析

场地条件如图3所示,表1为场地计算参数,其他参数为:泊松比 $\nu=0.33$, $\rho_f=1.0\text{ g/cm}^3$,土层的阻尼比均取0.05,半空间的阻尼比取0.02。计算中上覆土层的厚度取为: $H_1=H_2=B$ 。图7给出了界面不同透水条件对动力刚度的影响。图中,透水是指图3中饱和土与干土和半空间交界面透水;不透水是指图3中饱和土与干土和半空间交界面不透水;干土是指图3中饱和土退化为干土时的结果。

从图7(a)中可以看出,界面透水条件对竖向弹簧系数 k_z 影响最大,不透水结果与干土结果有较大差别,说明了饱和土体中孔隙水对场地动力响应应具有不可忽视的影响。当界面透水时, k_z 与干土相应结果基本一致;当界面不透水时, k_z 与干土、透水情况下的相应结果差别较大。如 $\delta=2.5$ 时, k_z 分别为:1.301(干土),1.306(透水),2.01(不透水)。当 $\delta=6.0$ 时, k_z 分别为:1.869(干土),1.467(透水),0.274(不透水)。

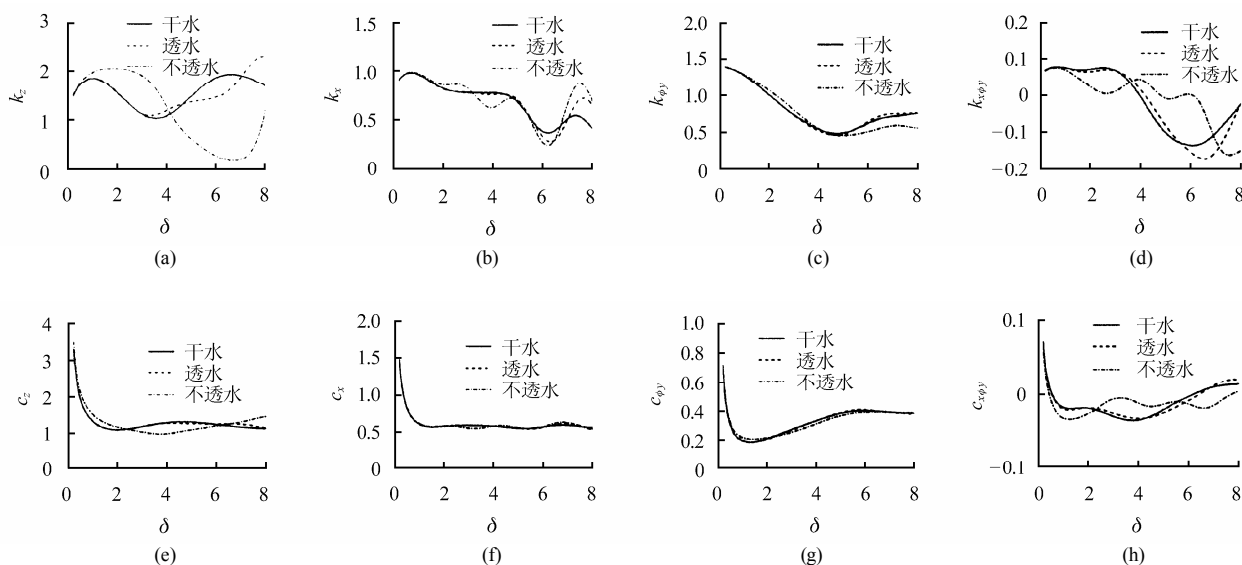


图7 界面不同透水条件对动力刚度的影响

Fig.7 The influence of permeability conditions on dynamic stiffness of strip rigid foundation

表1 场地计算参数
Table 1 Parameters of sites

名称	层号	层厚	μ / 10^8 Pa	ρ / $\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$	M / 10^8 Pa	n	α	b / $10^6\text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-4}$
干土	1	$0.2H_1$	1.0	1.70	/	/	/	/
干土	2	$0.3H_1$	1.6	1.80	/	/	/	/
干土	3	$0.5H_1$	2.3	1.85	/	/	/	/
饱和土	4	$0.4H_2$	3.1	1.90	4.0	0.3	0.97	3.0
饱和土	5	$0.6H_2$	4.2	2.00	5.0	0.2	0.98	2.0
半空间		∞	5.0	2.10	/	/	/	/

界面透水条件对水平向和摇摆耦合弹簧系数 k_{xpy} 有一定影响(见图7(d))。当界面透水时, k_{xpy} 与干土相应结果基本一致;当界面不透水时, k_{xpy} 与干土、透水情况下的相应结果差别较大。如 $\delta=2.5$ 时, k_{xpy} 分别为:0.075(干土),0.069(透水),0.005(不透水)。当 $\delta=6.0$ 时, k_{xpy} 分别为:-0.136(干土),-0.154(透水),0.001 14(不透水)。

界面透水条件对水平、摇摆弹簧系数 k_x , $k_{\phi y}$ 影

响不大(见图 7(b), 图 7(c)), 只是当 $\delta > 6.0$ 时, 3 种场地结果略有差别。这是因为饱和土中波是频散的, 当频率较高时, 波速的变化也较大, 从而引起结果的差异。另外, 界面透水条件对阻尼系数 c_x , c_z , $c_{\phi y}$, $c_{x\phi y}$ 影响不大(见图 7(e)~(h)), 与干土结果基本一致。

7 结 论

本文利用精确的土层和半空间动力刚度矩阵求解了含饱和土的层状场地的动力响应, 给出了含饱和土的层状场地自由场(入射 P 波、SV 波)、动力 Green 函数及刚性条形基础动力刚度的计算方法, 场地模型进一步接近实际情况。本文方法的退化结果与单相场地结果一致。通过算例, 研究了界面不同透水条件对基础动力刚度的影响, 并与相应单相场地结果进行了对比。研究表明:

(1) 界面透水条件对竖向弹簧系数影响最大, 与干土结果有较大差别, 说明了饱和土体中孔隙水对场地动力响应具有不可忽视的影响。

(2) 界面透水条件对水平向和摇摆耦合弹簧系数有一定影响, 对水平、摇摆弹簧系数影响不大。

(3) 界面透水条件对阻尼系数 c_x , c_z , $c_{\phi y}$, $c_{x\phi y}$ 影响不大, 与干土结果基本一致。

本文方法还可用来计算埋置基础的动力刚度等问题, 有关研究将另文讨论。

参 考 文 献

- [1] WOLF J P. Dynamic Soil-Structure Interaction[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1985.
- [2] RAJAPAKSE R K N D, SENJUNTICHA T. Dynamic response of a multi-layered poroelastic medium[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1995, 24: 703—722.
- [3] ZENG X, RAJAPAKSE R K N D. Vertical vibrations of a rigid disk embedded in a poroelastic medium[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1999, 23(15): 2 075—2 095.
- [4] SENJUNTICHA T, SAPSATHIARN Y. Forced vertical vibration of circular plate in multilayered poroelastic medium[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2003, 129(11): 1 330—1 341.
- [5] LIANG JIAN-WEN, YOU HONG-BING. Dynamic stiffness matrix of a poroelastic multi-layered site and its Green's functions[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2004, 3(2): 273—282.
- [6] LIANG JIANWEN, YOU HONGBING. Green's functions for uniformly distributed loads acting on an inclined line in a poroelastic layered site[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2005, 4(2): 233—241.
- [7] 尤红兵. 层状饱和半空间中凹陷地形或隧洞对弹性波的散射[D]. 天津: 天津大学, 2005.
- [8] 尤红兵, 梁建文. 层状饱和场地中线性分布斜线荷载的动力 Green 函数[J]. *振动工程学报*, 2005, (3): 335—341.
- YOU Hong-bing, LIANG Jian-wen, Green's functions for linearly distributed loads acting on inclined line in poroelastic layered site[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2005, (3): 335—341.
- [9] PHILIPPACOPOULOS A J. Axisymmetric vibration of disk resting on saturated layered half-space[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1989, 11(5): 2 301—2 322.
- [10] 陈胜立, 张建民, 陈龙珠. 下卧刚性基岩的饱和地基上基础的动力分析[J]. *固体力学学报*, 2002, 23(3): 325—329.
- CHEN Sheng-li, ZHANG Jian-min, CHEN Long-zhu. Dynamic response of a rigid circular footing on single-layered saturated soil[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, 23(3): 325—329.
- [11] 王国才, 陈龙珠, 陈胜立. 上覆单相弹性层的饱和地基上刚性圆板的扭转振动分析[J]. *固体力学学报*, 2003, 24(1): 24—30.
- WANG Guo-cai, CHEN Long-zhu, CHEN Sheng-li. Torsional vibrations of a rigid disk resting on saturated medium with an elastic substratum[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 24(1): 24—30.
- [12] 徐长节, 孙益华, 李庆金, 等. 上覆单相弹性层饱和地基上刚性条形基础竖向振动的混合边值问题[J]. *岩土力学*, 2005, 26(增刊): 105—108.
- XU Chang-jie, SUN Yi-hua, LI Qing-jin, et al. Mixed boundary value problem of vertical vibration of a rigid foundation on elastic soils with saturated substratum[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2005, 26(Supp.): 105—108.
- [13] 吴大志, 张政伟, 徐长节, 等. 下卧基岩双层地基上刚性圆板的扭转振动[J]. *岩石力学与工程学报*, 2005, 24(18): 3 316—3 321.
- WU Da-zhi, ZHANG Zheng-wei, XU Chang-jie, et al. Torsional vibration of a rigid circular plate resting on double-layered subgrade with rock substratum[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2005, 24(18): 3 316—3 321.
- [14] BIOT M A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media[J]. *Journal of Applied Physics*, 1962, 33: 1 482—1 498.